



**Universitat Autònoma
de Barcelona**

**VALORACIÓ DE LA PRIMA D'UN BUSINESS ANGEL A PARTIR D'UNA
CARTERA DE DERIVATS REALS: UNA APROXIMACIÓ BINOMIAL**

AUTORA: TAMARA OTERO RUIZ

GRAU: ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESSES

TUTORA: SÍLVIA BOU YSÀS

DATA: 16 DE MAIG DE 2014

**Agraïments: vull donar les gràcies a la Sílvia, ja que sense ella aquest treball no hagués estat possible; i als meus pares, per la seva paciència infinita.*

ABSTRACT

Des de l'any 2007 s'ha experimentat una situació de recessió econòmica tant a Catalunya com a Espanya, fet que ha provocat que les fonts fiables de finançament pels emprenedors siguin molt reduïdes, deixant una porta oberta a les empreses de capital risc i als Business Angels que, a diferència dels bancs que cobren un interès determinat periòdicament, cobren una prima al moment de fer la inversió, traduïda en una menor aportació econòmica.

L'objectiu principal d'aquest projecte consisteix en proposar un model de valoració de la prima que han de rebre els Business Angels al moment de fer aquesta aportació, ja que actualment no hi ha cap model de referència, al tractar-se d'un mercat *Over The Counter*. Així doncs, el que es vol aconseguir amb el present treball serà molt útil per aquest mercat, no organitzat, de finançament. El model creat considera la posició del Business Angel com una cartera de derivats reals, basant la valoració d'aquests en el model de Merton. Per tant, s'assumeix que les PIMES que l'apliquin emetran accions com si es tractés de grans empreses.

El treball consta de tres parts ben diferenciades. A la primera d'elles s'introduirà al lector en el marc teòric corresponent perquè sigui possible seguir el projecte d'una manera clara i entenedora. A la segona part es mostrarà l'adaptació del model de Merton per a la valoració de la cartera de derivats reals i es plantejarà l'estratègia d'un Business Angel des d'aquest punt de vista. Per últim, es deduirà el càlcul de la prima indicada i es farà un estudi de la sensibilitat d'aquesta en front la volatilitat de les accions i l'endeutament de l'empresa, acabant aquest apartat amb una simulació que il·lustrarà l'aplicació del model exposat.

TAULA DE CONTINGUTS

1. MARC TEÒRIC.....	1
1.1. Introducció al capital risc.....	1
1.1.1. Tipus d'inversió.....	2
1.2. Introducció als Business Angels	3
1.2.1. Tipus de Business Angels.....	3
2. INTRODUCCIÓ ALS ELEMENTS QUE COMPOSEN AQUEST TREBALL	4
2.1. Opcions	4
2.2. La fórmula de Black Scholes	7
2.3. Model de Merton	8
2.4. Primes per subscripció i Drets Preferents per Subscripció (DPS)	10
3. ADAPTACIÓ DEL MODEL DE MERTON.....	11
3.1. Un Business Angel des de la perspectiva de la teoria d'opcions.....	11
4. ESTRATÈGIA D'UN BUSINESS ANGEL DES DEL PUNT DE VISTA DE LA TEORIA D'OPCIIONS	14
4.1. Càlcul de la prima	16
4.2. Comprovació de la sensibilitat de la prima.....	17
5. SIMULACIÓ.....	22
6. CONCLUSIONS	25
7. BIBLIOGRAFIA.....	26
7.1. Webgrafia.....	26

1. MARC TEÒRIC

En aquests dos primers apartats es fa una breu introducció d'aquells elements que seran necessaris per a impulsar el projecte per tal que el lector se situï en el context adequat. Per a entendre correctament aquest treball, convé presentar les empreses de capital risc i els Business Angels com a font de finançament per a PIMES. També cal tenir molt clar el comportament d'una opció sobre un actiu. A més, és important comprendre el concepte tant de la fórmula de Black Scholes com del model de Merton, ja que l'essència d'aquest projecte consisteix en l'adaptació d'aquest. D'altra banda cal introduir una definició de les primes per subscripció d'accions, ja que afectaran al comportament d'un Business Angel envers les opcions de compra i venda d'accions.

1.1. Introducció al capital risc

Les empreses de capital risc són entitats que proporcionen finançament a societats que pertanyen a sectors dinàmics de l'economia, que tenen un nivell de risc considerable i de les quals s'espera un potencial creixement (acostumen a ser PIMES). A canvi, obtenen participació en el capital social d'aquestes, ja sigui mitjançant la compra d'accions o amb l'adquisició d'altres instruments de patrimoni.

Normalment aquestes societats inversores ofereixen un valor afegit a l'integrar-se al Consell d'Administració de les empreses a les quals financen per tal de proporcionar assessorament respecte les decisions estratègiques. Aquest fet emfatitza l'interès que tenen en l'èxit de la societat en la qual inverteixen, ja que això suposaria un ràpid augment del valor de l'empresa i, per tant, un major benefici per a l'entitat que proporciona el finançament. Arribat el punt on la inversió madura, el capitalista es retira.

Adicionalment, es crea la percepció que la societat receptora de finançament tindrà un gran èxit si la inversió es realitza a través d'una prestigiosa empresa de capital risc.

Degut a la crisi actual, i a la dificultat a la qual s'enfronten les PIMES a l'hora d'obtenir finançament mitjançant els mètodes tradicionals, és una pràctica que s'està duent a terme cada cop amb més força.

1.1.1. Tipus d'inversió

Els tipus d'inversió capital risc estan associats directament amb la fase de desenvolupament de l'empresa a la qual financen o els projectes d'aquesta. Les fases més comuns són les que s'exposen a continuació:

- a. **Seed capital:** inversió en empreses que, o bé acaben d'aparèixer, o encara no han iniciat la seva activitat empresarial i, per tant, els seus productes o serveis no estan completament definits.
- b. **Startup capital:** inversió en empreses de recent creació que encara no han obtingut benefici al no haver començat a produir i distribuir el producte o servei. La inversió d'aquesta fase acostuma a tenir un llarg període de maduració i sol requerir l'aportació de recursos posteriors per a finançar el creixement. Tot i que es tracta d'inversions amb menor risc que les anteriors, aquest continua tenint un paper important degut al canvi de dimensió que es vol obtenir.
- c. **Expansion capital:** aquest tipus d'inversió es realitza en empreses que ja tenen una mínima trajectòria però que volen expandir-se, o bé ampliant la seva participació en un mercat que ja han assolit, o introduint-se en un nou mercat.
- d. **Adquisició amb apalancament:** l'entitat de capital risc utilitza una quantitat significativa de diner prestat per a compensar les despeses de l'adquisició.
- e. **Capital de reestructuració:** invertir en entitats que necessiten un canvi d'orientació en les seves activitats empresarials, degut a que han obtingut resultats negatius durant un període prolongat de temps.
- f. **Capital de substitució:** en aquest cas l'empresa de capital risc no aporta nou capital, sinó que simplement substitueix a un o més accionistes que ja no es mostren interessats en continuar la seva inversió.

1.2. Introducció als Business Angels

Els Business Angels són persones físiques que ofereixen capital, coneixement tècnic, experiència, i confidencialitat a una *startup* o a emprenedors que volen posar en marxa un projecte empresarial, normalment a canvi de participació accionarial (sempre menys d'un 50 %) o bons convertibles. Els Business Angels també comparteixen la seva xarxa de contactes personals i, a diferència de les entitats de capital risc, que gestionen els diners de tercers a través d'un fons, inverteixen els seus estalvis propis. Financen les primeres etapes d'aquells projectes amb un alt potencial de creixement, i acostumen a invertir entre 50.000 i 300.000 euros o fins a un 25 % del seu capital disponible, escollint els projectes segons els seus criteris personals i sense entrar en la gestió empresarial.

Els Business Angels inverteixen en sectors que coneixen i en els quals tenen experiència, amb un horitzó temporal d'entre tres i cinc anys. A nivell nacional, els tres sectors amb un major grau d'inversió per part d'aquests són el de l'*e-commerce*, el biotecnològic i el d'energies renovables. A més, valoraran molt positivament que els membres del projecte hagin invertit els seus estalvis prèviament, ja que això és senyal que creuen en el seu projecte i que faran tot el possible per a que aquest tiri endavant.

El **risc** al qual s'enfronten els Business Angels és molt elevat i, per tant, requereixen un alt retorn sobre la inversió (ROI), el qual mesura la capacitat que té l'empresa per a generar valor. Aquest ha de ser almenys de 10 cops la inversió original dins un període de cinc anys. Per tant, es pot concloure que aquests tipus d'inversors busquen projectes amb una alta **escalabilitat**. Aquesta és la capacitat que té l'empresa per a créixer i augmentar els seus ingressos sense que aquest creixement suposi un augment lineal de les despeses i de la inversió.

1.2.1. Tipus de Business Angels

Aquests inversors es poden classificar en funció del seu nivell d'activitat, del seu rol dins l'empresa o del nombre de Business Angels:

- a. En funció del seu nivell d'activitat poden ser **operatius**, si realitzen una o més d'una operacions d'inversió a l'any, o **passius**, si estudien les inversions però encara no n'han realitzat ninguna d'efectiva.
- b. En funció del seu rol dins l'empresa poden ser **treballadors**, si són directius o executius que aporten valor afegit constant a l'empresa on han realitzat la inversió; **empresarials**, quan s'impliquen molt en la gestió i l'activitat de l'empresa on han realitzat la inversió; **consultors**, aquells qui no acostumen a aportar capital, sinó que transmeten el *know-how* i una xarxa de contactes; o **financers**, si aporten capital sense implicar-se en la gestió de l'empresa.
- c. En funció del nombre de Business Angels es distingeix entre aquells que són individuals i els que estan sindicats i actuen d'una manera conjunta.

2. INTRODUCCIÓ ALS ELEMENTS QUE COMPOSEN AQUEST TREBALL

2.1. Opcions

Una opció és un contracte que dóna al seu propietari el dret (no l'obligació) de comprar o vendre un actiu, anomenat subjacent, a un preu estipulat (preu d'exercici) en una data determinada. Si l'opció només pot exercir-se en una data concreta, és coneguda com opció europea. Si es pot exercir des del moment de la seva compra fins la data determinada, es coneix com una opció americana. Es pot distingir entre dos tipus ben diferenciats d'opcions:

- a. L'opció de compra (**call**) dóna al seu propietari el dret a comprar una acció. En aquest cas el posseïdor de la *call* guanya si incrementa el preu de l'acció i es protegeix en el cas contrari, no exercint el dret de compra quan, a la data de venciment, el preu de l'acció és inferior al preu d'exercici. La compra d'una *call* és interessant quan es tenen expectatives alcistes sobre l'evolució futura del mercat de valors. A més, l'efecte amplificació és molt elevat, ja que amb petites inversions es poden obtenir altes rendibilitats.

- b. L'opció de venda (**put**) dóna al seu propietari el dret a vendre una acció. El valor de l'opció de venda a la data de venciment és la diferència entre el preu d'exercici i el preu de mercat. El venedor de l'acció no perdrà diners sempre que el preu d'aquesta sigui superior al preu d'exercici. La compra d'una **put** és interessant quan s'utilitza com a cobertura, quan es preveuen caigudes en el preu de les accions que es posseeixen.

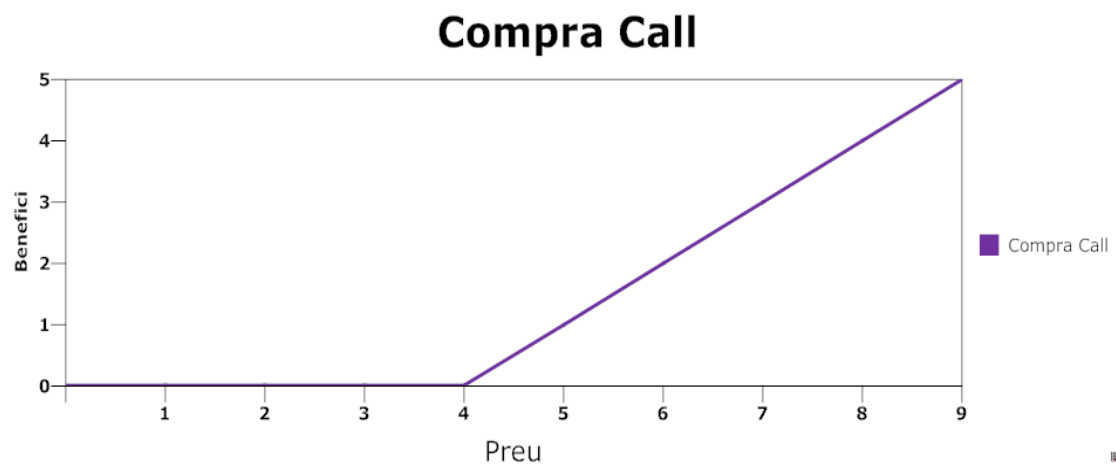
El preu d'una opció depèn tant de la cotització de l'actiu subjacent com del preu d'exercici, la data de venciment, els dividends, el tipus d'interès i la volatilitat.

La teoria de la valoració d'opcions es regeix sota el principi de l'absència d'arbitratge, per tant, s'observa una paritat *Put-Call* en els mercats, que es defineix de la següent manera:

$$V_{call} + V_{APex} = V_{put} + P_{acc}$$

Aquesta expressió posa de manifest que la suma del valor de l'opció de compra i el valor actual del preu d'exercici ha de coincidir amb la suma del valor de l'opció de venda i preu de l'acció.

A continuació es mostra un gràfic que descriu el comportament d'un accionista que **compra** una **call** amb un preu d'exercici (k) igual a 4:

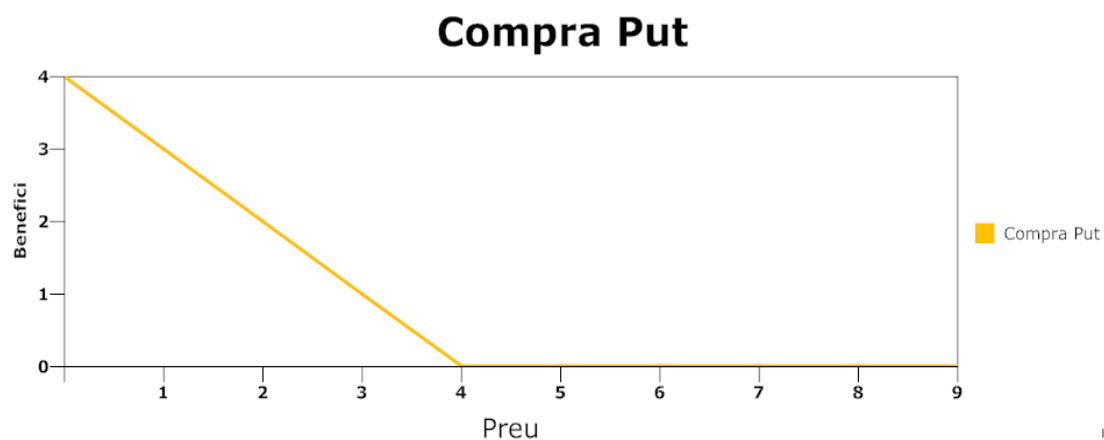


Gràfic 1. Font: elaboració pròpia

És fàcil observar que l'inversor no exercirà l'opció de compra si el preu de l'acció (*strike*) en el moment del venciment és inferior al preu d'exercici (4), ja que podria obtenir l'acció directament al mercat a un preu inferior. En aquest cas, les pèrdues són limitades, al coincidir amb la prima pagada a l'hora d'obtenir l'opció.

Tot el que el valor de l'acció pugi a la borsa per sobre d'aquest preu d'exercici, menys el preu que s'ha pagat a l'hora d'adquirir l'opció, seran beneficis per a l'accionista.

A continuació es mostra un gràfic que descriu el comportament d'un accionista que **compra una *put*** amb un preu d'exercici (k) igual a 4:



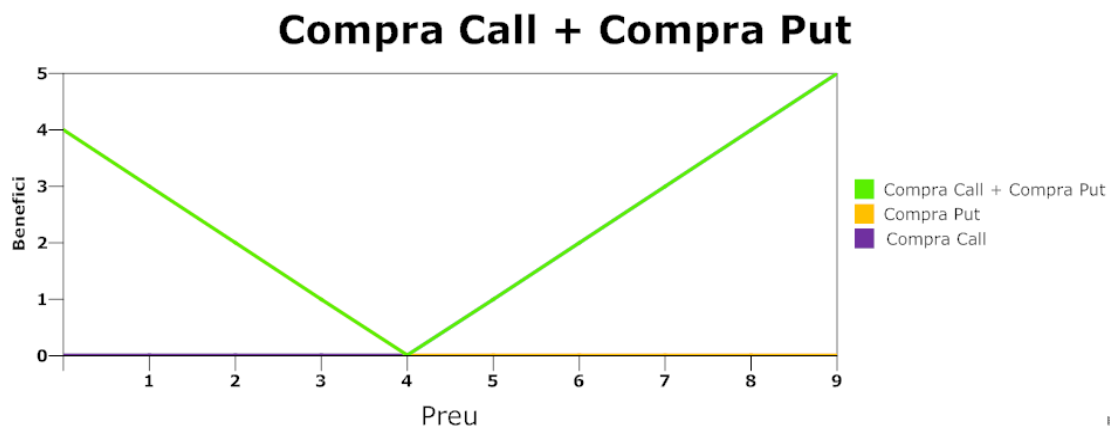
Gràfic 2. Font: elaboració pròpia

Es pot comprovar en el gràfic anterior que en el cas de compra d'una *put*, l'inversor guanya diners quan el preu de l'acció (*strike*) al moment de venciment, cau per sota el preu d'exercici fixat. En aquesta cas, els guanys obtinguts amb la *put* compensen total o parcialment la pèrdua experimentada causada per la caiguda del preu de les accions. Per molt que augmenti el valor de l'acció, la pèrdua màxima quedarà limitada per la prima pagada a l'hora d'adquirir la *put*, és a dir, el preu de l'opció.

D'altra banda, cal mencionar que en aquesta situació, els guanys de l'inversor augmenten a mida que el preu de l'acció baixa en el mercat.

Es presenta a continuació una combinació dels dos escenaris anteriors, on un accionista compra la mateixa quantitat de *calls* i *puts*, amb el mateix venciment i el mateix preu d'exercici (k).

Aquesta situació s'anomena **straddle comprat** i és una estratègia adequada quan un inversor creu que les opcions estan infravalorades. L'accionista espera un moviment bruscat en el preu del subjacent, però no està segur en quina direcció es produirà aquest, si a l'alça o a la baixa. Aquesta situació permet a l'inversor cobrir-se del risc al qual s'exposaria si només comprés una *put* o una *call*.



Gràfic 3. Font: elaboració pròpia

En aquest cas, si el preu de l'acció és superior al preu d'exercici, s'exercirà l'opció *call*, perdent íntegrament la prima pagada per la *put*; en cas contrari, s'exercirà l'opció *put*, perdent la totalitat de la prima pagada per la *call*. El benefici esperat amb aquesta estratègia és limitat sigui quin sigui el moviment del mercat, i només es produiran pèrdues quan el mercat es mantingui estable. Aquestes pèrdues també són limitades, i corresponen a les primes que es paguen per adquirir les *puts* i les *calls*.

2.2. La fórmula de Black Scholes

És una expressió que s'utilitza per a realitzar una estimació del valor actual d'una opció de compra o de venda d'accions en una data futura. A diferència del mètode binomial de valoració d'opcions, ja sigui mitjançant la cartera de rèplica o el mètode de neutralitat al risc, la fórmula de Black Scholes s'aproxima més a la realitat, ja que es considera un nombre infinit de subperíodes.

Cal tenir en compte que tant el preu de l'acció com el de l'opció provenen de la mateixa font d'incertesa. A més, la fórmula de Black Scholes és independent de totes les variables que es veuen afectades per les preferències de risc. Per tant, es tracta d'un principi de valoració d'opcions neutral al risc que presenta el següent aspecte:

$$\text{Valor } \textit{call} = [N(d_1) \times P] - [N(d_2) \times VA(EX)]$$

On:

$$d_1 = \frac{\log [P/VA(EX)]}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$N(d)$ = funció de densitat acumulada de la probabilitat normal

EX = preu d'exercici de l'opció; VA(EX) es calcula descontant-lo al tipus d'interès lliure de risc

t = nombre de períodes fins la data d'exercici (1 període = 1 any)

P = preu actual de l'acció

σ = desviació típica per període de la taxa de rendibilitat de l'acció

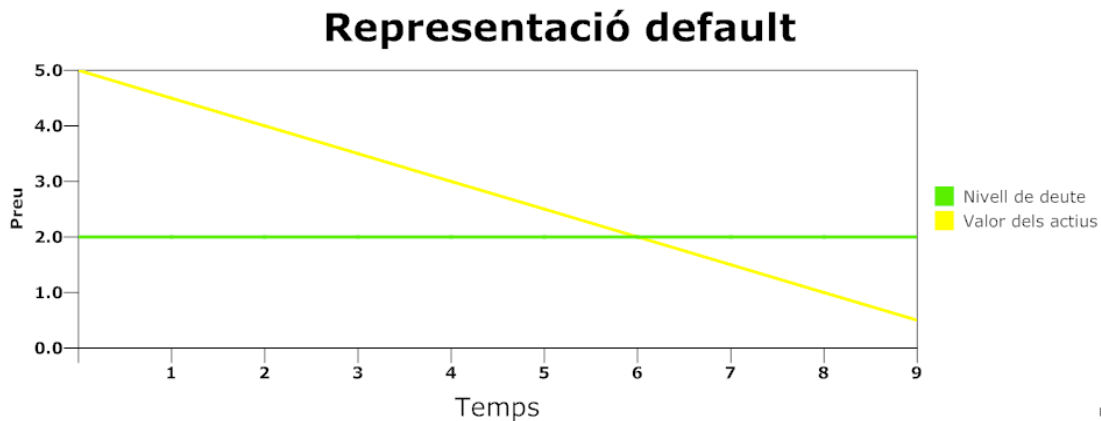
$N(d_1)$ = probabilitat que una variable distribuïda normalment sigui inferior a d_1 desviacions típiques per sobre la mitja. Aquest valor es troba a les taules d'estadística de la distribució de la llei normal.

El model de Black-Scholes considera una opció que no paga dividendes. Per tant, quan es valora una opció sobre una acció europea que paga dividendes, s'ha de substituir el preu de l'acció (P) per aquest menys el VA del dividend en Black-Scholes. Els dividendes seran la reducció esperada en el preu esperat de l'acció, i només s'inclouran aquells que vencin durant la vida de l'opció.

2.3. Model de Merton

Aquest model s'utilitza actualment per tal d'avaluar el risc de crèdit del deute d'una societat i permet tractar eficaçment el risc, tant dels agents econòmics als que els hi interessa, com d'aquells que en són adversos. Els inversors en fan ús tant per a determinar la capacitat que té una empresa de complir les seves obligacions financeres com per a conèixer la probabilitat de *default* que presenta una entitat.

Una empresa entra en *default* quan el valor dels seus actius cau per sota el nivell del seu deute, per tant, la probabilitat de *default* és la probabilitat que en un període en concret, el valor dels actius sigui inferior al valor dels passius. En el següent gràfic es representa aquest escenari.



Gràfic 4. Font: elaboració pròpia

En aquest model els passius es tracten com a bons de cupó zero i es consideren fixes a curt termini. D'altra banda, el valor dels actius a curt termini, els quals no són fixes, seguiran una distribució log-normal.

Mentre que la fórmula de Black-Scholes és la probabilitat d'exercir l'opció de compra o que el bo no entri en *default*, el model de Merton és la probabilitat que una entitat entri en aquest escenari. Segons aquest model es tracta l'opció de responsabilitat limitada com una opció de venda, i aquest és el dret de limitació de responsabilitat sobre l'actiu endeutat on el preu d'exercici és el pagament promès als creditors.

En aquest cas, el cost efectiu de l'operació dels creditors D_1 és el següent:

$$D_1 = [D_0 - \text{ORL}] \cdot (1+k)^n$$

On $D_1 = D_0 \cdot (1+i)$

El dret de responsabilitat limitada dels accionistes pot considerar-se com una opció de venda sobre l'actiu de l'empresa.

Merton va deduir la següent fórmula per tal de valorar l'opció de responsabilitat limitada perpètua (Merton, Robert C. (1973), (1990). *Theory of rational option pricing*, pàg. 298-300):

$$ORL_{\infty} = \left[\frac{DN}{1 + \gamma} \right] \cdot \left[\frac{(1 + \gamma) \cdot A}{\gamma \cdot DN} \right]^{-\gamma}$$

On:

DN = preu de l'exercici

A= valor de l'actiu subjacent

r = tipus d'interès lliure de risc

σ = desviació típica de la rendibilitat de l'actiu

$$\gamma = \frac{2 \cdot r}{\sigma^2}$$

2.4. Primes per subscripció i Drets Preferents per Subscripció (DPS)

Les **primes per subscripció** d'accions representen la diferència d'excés entre el pagament per les accions subscrietes i el valor nominal de les mateixes. Això és duu a terme quan el valor d'emissió supera el valor nominal, és a dir, quan es tracta d'emissions sobre la par. En aquest cas, tots els accionistes pagaran per cada acció una mica més del seu valor nominal amb l'objectiu de recapitalitzar l'empresa. Per tant, l'emissió d'accions amb prima suposa, a part del desemborsament del valor d'emissió de les accions, una aportació suplementària a càrrec de qui les subscrigui.

$$Valor d'emissió = valor nominal + prima d'emissió$$

Quan es duu a terme una ampliació de capital mitjançant l'emissió d'accions, el preu d'emissió d'aquestes sol ser inferior al valor de mercat al qual cotitzen les accions antigues. Això comporta que els inversors estiguin interessats en adquirir noves accions abans de les que ja hi ha en circulació. A més es produeix un efecte dilució, és a dir, una disminució del valor de les accions antigues, a l'augmentar en nombre d'accions sense que el valor de l'empresa s'incrementi en la mateixa proporció.

En aquest cas l'antic accionista té el **dret de subscripció preferent** en les ampliacions de capital social, en la part corresponent i al preu que la societat fixi. Aquest és un dret d'opció que presenten els socis d'una entitat davant tercers interessats en subscriure accions, amb l'objectiu que els primers respectin la seva proporció de capital social i a efectes que la seva participació no es vegi disminuïda per l'ampliació de capital en base l'aportació de nous accionistes.

3. ADAPTACIÓ DEL MODEL DE MERTON

Es mostra a continuació un quadre resum on es pot comprovar la diferent nomenclatura que reben els elements principals del model de Merton en la seva adaptació a la teoria de les opcions:

Taula 1. Adaptació del model de Merton

	Model de Merton	Teoria de les opcions
Valor de l'actiu subjacent	A_0	S_0
Opció de compra	S_0	C_0
Opció de venda	ORL_0	P_0
Preu d'exercici	$D_1 = D_0 (1+i)$	k

Font: elaboració pròpia

3.1. Un Business Angel des de la perspectiva de la teoria d'opcions

El Business Angel comprarà una opció de compra i vendrà una opció de venda; per tant, fins al preu d'exercici (pagament promès) estarà endeutat com un creditor i, a partir d'aquest, obtindrà la riquesa de l'accionista. A continuació s'exposen els dos escenaris esmentats i, mitjançant la unió d'aquests, es fa una representació gràfica del comportament d'un Business Angel davant la compra-venda d'opcions.

Cal aclarir que tots els gràfics que s'utilitzen a continuació mostren només els resultats en el moment d'exercir l'opció; és a dir, no tenen en compte el cost inicial d'adquisició de l'opció ni els ingressos inicials obtinguts com a conseqüència de la seva venda. A més, el preu d'exercici en tots els escenaris és de 4 u.m.

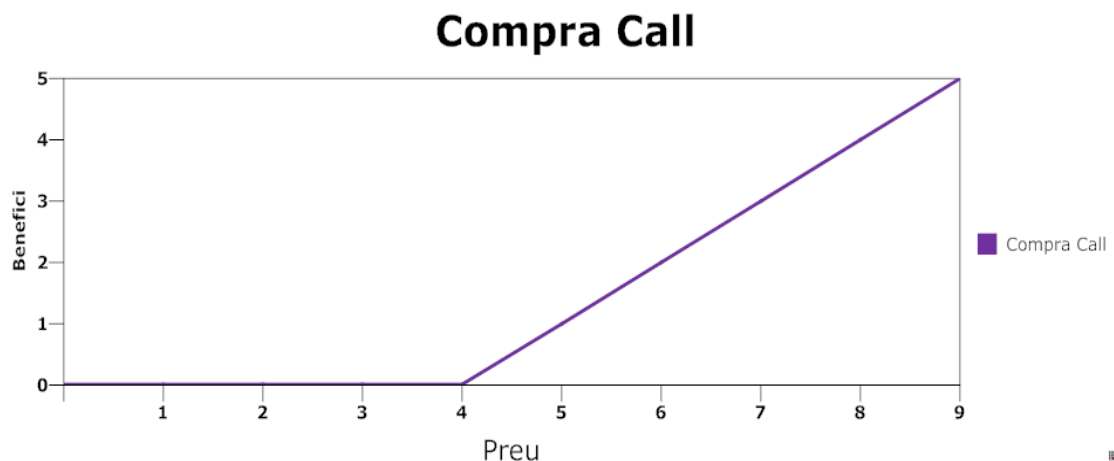
a. Compra d'una opció de compra

El primer escenari mostra la compra d'una *call*. Sempre que el preu de l'acció, a la data fixada com a data d'exercici, sigui inferior al preu d'exercici, la compra d'accions es realitzarà directament al mercat bursàtil, al no haver-hi ningú disposat a pagar aquest preu per a obtenir l'acció a través de l'opció. D'altra banda, quan el preu de l'acció en aquesta mateixa data és superior al preu d'exercici, valdrà la pena fer ús de l'opció de compra.

En aquest cas l'opció tindrà un valor igual al preu de mercat de l'acció menys el preu d'exercici que s'ha pagat per adquirir-la, i això suposa l'ingrés que el propietari de l'opció ha obtingut al haver-la exercit.

Per a calcular el benefici només cal que a aquest ingrés se li descompti el preu que s'ha pagat en el moment de l'adquisició de l'opció de compra. Per exemple: si el preu d'exercici en una data determinada és de 150 u.m., i el preu de mercat de l'acció en aquest moment és de 200 u.m., l'ingrés (valor de l'opció de compra) serà de 50 u.m., però el benefici serà inferior, al haver-li de restar el que s'ha pagat per a obtenir l'opció de compra (preu *call*).

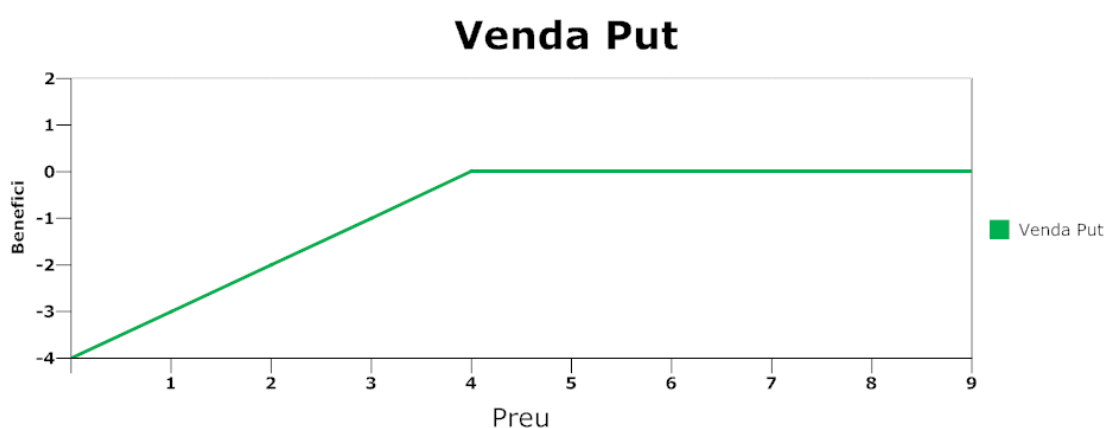
Tal i com s'ha comentat anteriorment, tot i que sembli que l'adquisició d'una opció de compra generi sempre un benefici nul com a pitjor escenari, si es té en compte el preu que s'ha pagat per l'adquisició d'aquesta opció, el propietari tindrà pèrdues sempre que el preu de l'acció sigui inferior a la suma del preu d'exercici i el preu de l'opció de compra.



Gràfic 5. Font: elaboració pròpia

b. Venda d'una opció de venda

Aquesta segona situació mostra la venda d'una *put*. En aquest cas el venedor de l'opció de venda està obligat a pagar una quantitat igual al preu d'exercici per l'acció si el comprador de la put així ho requereix. El venedor tindrà un benefici assegurat sempre que el preu de l'acció es mantingui per sobre del preu d'exercici, però perdrà diners si el preu de l'acció cau per sota d'aquesta xifra.



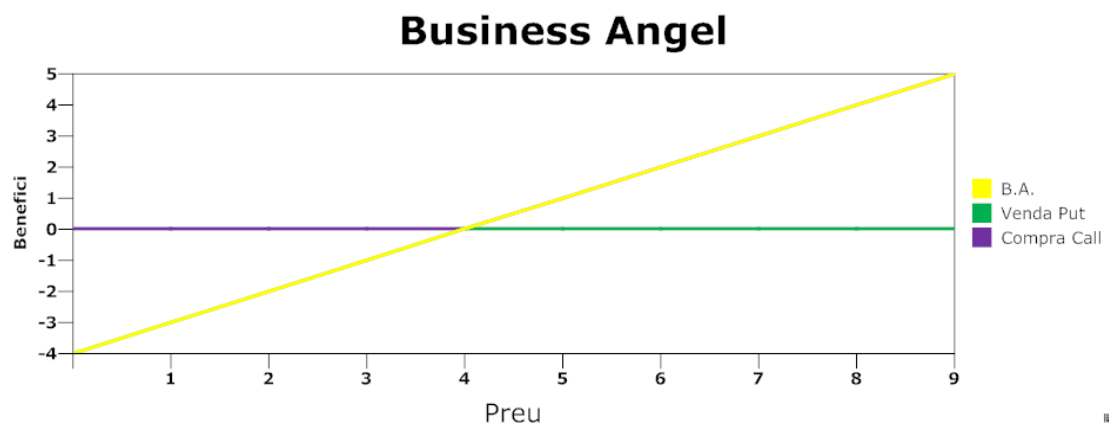
Gràfic 6. Font: elaboració pròpia

Tot i que sembla que la venda d'una opció de venda genera un benefici màxim nul, cal tenir en compte els diners rebuts per la venda d'aquesta. Per tant, aquest preu que s'ha cobrat per l'opció de venda, serà el benefici que el venedor obtindrà sempre que el preu sigui superior a la diferència entre el preu d'exercici i el preu de l'opció de venda.

c. Escenari del Business Angel

Un Business Angel té una cartera de derivats reals, que està composta per la **compra** d'una *call* sobre els actius de l'empresa i la **venda** d'una *put* (aquesta representa una obligació futura, ja que l'inversor no cobrarà el deute que ha aportat si l'empresa no genera benefici).

Tal i com es pot comprovar en el gràfic corresponent, fins al punt on el preu de l'acció coincideix amb el preu d'exercici (k) té el mateix comportament que un creditor, i a partir d'aquest punt, té la riquesa d'un accionista.



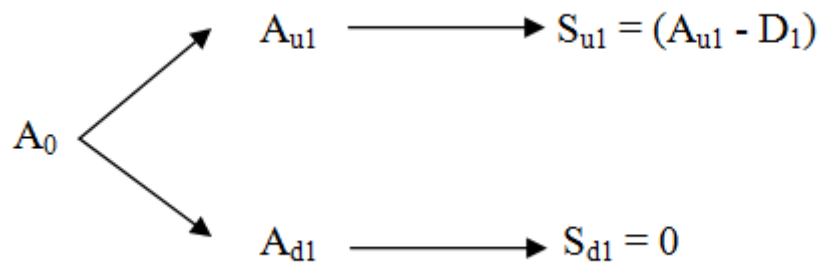
Gràfic 7. Font: elaboració pròpia

4. ESTRATÈGIA D'UN BUSINESS ANGEL DES DEL PUNT DE VISTA DE LA TEORIA D'OPCIONS

Un inversor amb les característiques d'un Business Angel haurà de prestar menys diners a l'empresa a canvi de comprar *calls*, ja que amb la venda de les *puts* (Opció de Responsabilitat Limitada) incorre el risc de perdre la totalitat de l'inversió aportada en cas que l'empresa a la qual presta no generi beneficis. Això comporta que rebrà una prima en el moment de realitzar l'inversió.

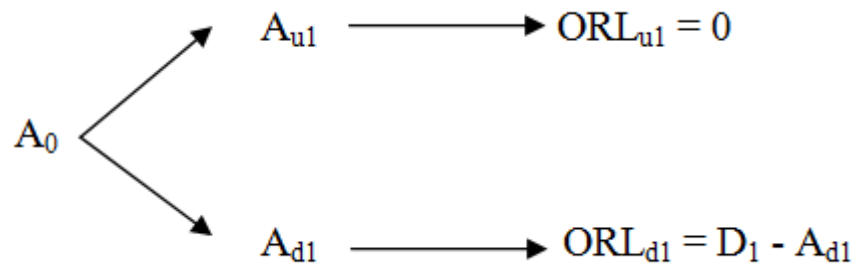
Es mostren a continuació els arbres de decisió corresponents al comportament d'un Business Angel:

a. Arbre de decisió de la compra d'una *call*.



Tal i com es pot observar, l'inversor utilitzarà l'opció de compra sempre que el preu d'exercici sigui inferior al preu de mercat de l'actiu, obtenint un valor de la *call* equivalent a la diferència entre el valor de l'actiu i el pagament promès als creditors (D_1). En cas contrari, l'opció de compra no tindrà cap valor.

b. Arbre de decisió de la venda d'una *put*.



En aquest cas, l'inversor utilitzarà l'opció de venda (Opció de Responsabilitat Limitada) sempre que el preu d'exercici sigui superior al preu de mercat de l'actiu, obtenint un valor de la *put* igual a la diferència entre el pagament promès als creditors (D_1) i el valor de l'actiu. En cas contrari, aquesta opció no tindrà cap valor i l'inversor no l'utilitzarà.

El quadre del comportament estratègic d'un Business Angel des del punt de vista de la teoria d'opcions és el següent:

Taula 2. Fluxos de caixa de la cartera de derivats reals

	$t=0$	$t=1 \rightarrow \text{si } A_1 > D_1$	$t=1 \rightarrow \text{si } A_1 < D_1$
Compra call d'accions		$A_{1u} - D_1$	0
Venda put amb ORL		0	$-(D_1 - A_{1d})$
Endeutament	$-(D_0 - X)$	D_1	D_1
Resultat	$-(D_0 - X)$	A_{1u}	A_{1d}

Font: elaboració pròpia

En el moment actual ($t=0$), S_0 representa el valor de les accions en el moment de l'adquisició de l'opció de compra sobre aquestes, ORL fa referència a l'opció de responsabilitat limitada que té el Business Angel pel fet de vendre l'opció de venda, D_0 és el valor del préstec per part de l'inversor i X és la prima que rep aquest per a cobrir-se del risc al qual queda exposat.

En un moment futur ($t=1$) es pot observar que poden produir-se dos escenaris: el primer d'ells mostra que l'actiu de l'empresa a la qual el Business Angel ha invertit i de la qual és accionista, és superior al deute d'aquesta, per tant, el resultat per a l'inversor serà l'actiu de l'empresa en el moment futur (valorat més del que val actualment, up).

La segona possibilitat és que l'actiu de l'empresa en un moment futur sigui inferior al deute d'aquesta, llavors, el Business Angel rebria l'actiu de l'empresa (valorat menys del que val actualment, down)

A la taula anterior es pot comprovar que el Business Angel té una sèrie de drets comprats i venuts a canvi de prestar diners. L'inversor només presta $D_0 - X$, que és el preu que paga el dia d'avui per a obtenir l'actiu de l'empresa en un futur.

Es conclou de tot aquest anàlisi que la situació d'un Business Angel equival a obtenir l'actiu de l'empresa.

4.1. Càlcul de la prima

Per a calcular la prima que rep el Business Angel en el moment de fer l'aportació de diners cal plantejar l'equació fonamental de les opcions europees que, mostrada en termes de la teoria d'opcions és la següent:

$$S_0 + P = C + VA(Ex)$$

Si es tradueix aquesta equació i es mostra utilitzant els elements del model de Merton, quedaria de la manera que es mostra a continuació:

$$A_0 + ORL_0 = S_0 + D_0$$

Partint de l'apartat anterior, on s'ha demostrat que el que obté un Business Angel en $t = 1$ equival a tenir l'actiu de l'empresa, es pot afirmar que en $t = 0$ l'inversor també tindrà l'actiu de l'empresa.

Per tant, en $t = 0$:

$$A_0 = D_0 - X$$

On X representa la prima que rep el Business Angel al moment de fer l'aportació econòmica pel fet de ser també creditor de l'empresa, és a dir, el que dóna de menys sobre el nominal.

Si es substitueix aquesta igualtat a la fórmula anterior s'obté:

$$D_0 - X + ORL_0 = S_0 + D_0$$

I, aïllant la X d'aquesta equació, s'arriba a la següent igualtat.

$$X = ORL_0 - S_0$$

4.2. Comprovació de la sensibilitat de la prima

Per tal de poder realitzar un estudi de la sensibilitat d'aquesta prima i donat que una distribució binomial pura no és derivable, s'ha pres com a referència la transformació realitzada per Black-Scholes per a trobar el valor que pot prendre el subjacent al final del primer període.

A continuació, es plantejarà una cartera de rèplica, que presenta el mateix valor que l'opció, per a l'opció de compra que té comprada el Business Angel i una altra per a l'opció de responsabilitat limitada que té venuda. Aquesta cartera es presentarà en funció de la volatilitat i el deute per a, posteriorment, comprovar que la sensibilitat de la prima que rep l'inversor en funció d'aquests paràmetres coincideix amb el que s'espera.

La cartera de rèplica formada per l'opció de compra és:

$$\begin{cases} \Delta \cdot S_u + B(1 + i) = C_u \\ \Delta \cdot S_d + B(1 + i) = C_d \end{cases}$$

Si es mostra aquesta equació amb els elements del model de Merton, presenta el següent aspecte:

$$\begin{cases} \Delta \cdot A_u + B(1 + i) = S_u \\ \Delta \cdot A_d + B(1 + i) = S_d \end{cases}$$

I, si s'exposa el sistema en funció de la volatilitat i l'endeutament, s'obté l'equació que es mostra a continuació:

$$\begin{cases} \Delta \cdot A_0 \cdot e^{\sigma} + B(1+i) = A_0 \cdot e^{\sigma} - D_0(1+i) \\ \Delta \cdot A_0 \cdot e^{-\sigma} + B(1+i) = 0 \end{cases}$$

On:

σ = volatilitat que tenen les accions del sector

$$u = e^{\sigma}$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma}$$

Δ = nombre d'accions. Si $\Delta > 0$ es compren accions i, en cas contrari, se'n venen.

B = posició en renda fixa (unitats monetàries). Si $B > 0$ inversió a l'interès lliure de risc i, en cas contrari, es demana un préstec al mateix tipus d'interès.

Utilitzant el mètode de la reducció per a resoldre sistemes d'equacions, s'arriba a la següent expressió:

$$\Delta(A_0 \cdot e^{\sigma} - A_0 \cdot e^{-\sigma}) = A_0 \cdot e^{\sigma} - D_0(1+i)$$

Aïllant el paràmetre Δ d'aquesta equació es troba el nombre d'accions que componen la cartera. En aquest cas:

$$\Delta = \frac{A_0 \cdot e^{\sigma} - D_0(1+i)}{A_0 \cdot e^{\sigma} - A_0 \cdot e^{-\sigma}}$$

I, substituint a l'expressió presentada anteriorment es pot arribar al valor de B que, en aquesta simulació seria el següent:

$$B = - \left[\frac{A_0 \cdot e^{-\sigma} \left(\frac{A_0 \cdot e^{\sigma} - D_0(1+i)}{A_0 \cdot e^{\sigma} - A_0 \cdot e^{-\sigma}} \right)}{(1+i)} \right]$$

Per a trobar el valor de l'opció de compra en el moment zero (S_0) només cal que se substitueixin els valors obtinguts a l'equació que es mostra a continuació:

$$S_0 = \Delta \cdot A_0 + B$$

Per tant:

$$S_0 = A_0 \left[\frac{A_0 \cdot e^\sigma - D_0(1+i)}{A_0 \cdot e^\sigma - A_0 \cdot e^{-\sigma}} \right] - \left[\frac{A_0 \cdot e^{-\sigma} \left(\frac{A_0 \cdot e^\sigma - D_0(1+i)}{A_0 \cdot e^\sigma - A_0 \cdot e^{-\sigma}} \right)}{(1+i)} \right]$$

Un cop obtinguda l'equació del valor de l'opció de compra al moment zero, es repeteix el procés per a formar la cartera de rèplica de l'opció de responsabilitat limitada i així trobar el valor d'aquesta en el mateix moment, obtenint:

$$\begin{cases} \Delta \cdot S_u + B(1+i) = P_u \\ \Delta \cdot S_d + B(1+i) = P_d \end{cases}$$

I, representant aquestes equacions amb els elements del model de Merton, s'arriba a un sistema que presenta el següent aspecte:

$$\begin{cases} \Delta \cdot A_u + B(1+i) = ORL_u \\ \Delta \cdot A_d + B(1+i) = ORL_d \end{cases}$$

A continuació s'exposa el sistema en funció de la volatilitat i endeutament:

$$\begin{cases} \Delta \cdot A_0 \cdot e^\sigma + B(1+i) = 0 \\ \Delta \cdot A_0 \cdot e^{-\sigma} + B(1+i) = D_0(1+i) - A_0 \cdot e^{-\sigma} \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de la reducció per a resoldre sistemes d'equacions, s'arriba a la següent expressió:

$$\Delta(A_0 \cdot e^\sigma - A_0 \cdot e^{-\sigma}) = A_0 \cdot e^{-\sigma} - D_0(1+i)$$

Aïllant el paràmetre Δ d'aquesta equació es troba el nombre d'accions que componen la cartera. En aquest cas:

$$\Delta = \frac{A_0 \cdot e^{-\sigma} - D_0(1+i)}{A_0 \cdot e^\sigma - A_0 \cdot e^{-\sigma}}$$

I, substituint a l'expressió presentada anteriorment es pot arribar al valor de B que, en aquesta simulació seria el següent:

$$B = \left[\frac{-A_0 \cdot e^\sigma \left(\frac{A_0 \cdot e^{-\sigma} - D_0(1+i)}{A_0 \cdot e^\sigma - A_0 \cdot e^{-\sigma}} \right)}{(1+i)} \right]$$

Per a trobar el valor de l'opció de responsabilitat limitada en el moment zero (ORL_0) només cal que se substitueixin els valors obtinguts a l'equació que es mostra a continuació:

$$ORL_0 = \Delta \cdot A_0 + B$$

Per tant:

$$ORL_0 = A_{\Phi} \left[\frac{A_0 \cdot e^{-\sigma} - D_0(1+i)}{A_{\Phi} \cdot e^{\sigma} - A_{\Phi} \cdot e^{-\sigma}} \right] - \left[\frac{A_{\Phi} \cdot e^{\sigma} \left(\frac{A_0 \cdot e^{-\sigma} - D_0(1+i)}{A_{\Phi} \cdot e^{\sigma} - A_{\Phi} \cdot e^{-\sigma}} \right)}{(1+i)} \right]$$

Tal i com s'ha demostrat a l'apartat anterior, la prima que rep el Business Angel al moment de realitzar la inversió és:

$$X = ORL_0 - S_0$$

Si s'expressa aquesta equació amb els resultats obtinguts en el moment zero de l'opció de compra i l'opció de responsabilitat limitada s'arriba a la següent expressió:

$$X = \left[\frac{A_0 \cdot e^{-\sigma} - D_0(1+i)}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} \right] + \left[\frac{-e^{\sigma} \left(\frac{A_0 \cdot e^{-\sigma} - D_0(1+i)}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} \right)}{(1+i)} \right] - \left[\frac{A_0 \cdot e^{\sigma} - D_0(1+i)}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} \right] + \left[\frac{-e^{-\sigma} \left(\frac{A_0 \cdot e^{\sigma} - D_0(1+i)}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} \right)}{(1+i)} \right]$$

A continuació es deriva l'equació de la prima que rep el Business Angel, en el moment de realitzar la seva inversió, en funció de la volatilitat, per a comprovar que la sensibilitat que té aquesta prima davant variacions en la volatilitat de les accions d'un sector és nul·la. Això es deu a la posició en la qual es troben aquest tipus d'inversors ja que tenen una *Call* comprada i una *Put* venuda i, per tant, l'efecte que es podria esperar pel fet de trobar-se en una posició de creditor queda compensat amb l'efecte oposat pel fet de ser, ahora, accionista.

La següent derivada parcial il·lustra aquesta sensibilitat comentada anteriorment:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial \sigma} = & \frac{-A_0 e^{-\sigma}(e^{\sigma} - e^{-\sigma}) - [(e^{\sigma} + e^{-\sigma})(A_0 e^{-\sigma} - D_0(1+i))]}{(e^{\sigma} - e^{-\sigma})^2} \\
& + \frac{1}{1+i} \left[-e^{\sigma} \left(\frac{A_0 e^{-\sigma} - D_0(1+i)}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} \right) \right. \\
& + (-e^{\sigma}) \left[\frac{-A_0 e^{-\sigma}(e^{\sigma} - e^{-\sigma}) - [(e^{\sigma} + e^{-\sigma})(A_0 e^{-\sigma} - D_0(1+i))]}{(e^{\sigma} - e^{-\sigma})^2} \right] \Bigg] \\
& - \left[\frac{A_0 e^{\sigma}(e^{\sigma} - e^{-\sigma}) - [(e^{\sigma} + e^{-\sigma})(A_0 e^{\sigma} - D_0(1+i))]}{(e^{\sigma} - e^{-\sigma})^2} \right] \\
& - \frac{1}{1+i} \left[-e^{-\sigma} \left(\frac{A_0 e^{\sigma} - D_0(1+i)}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} \right) \right. \\
& \left. + e^{-\sigma} \left[\frac{A_0 e^{\sigma}(e^{\sigma} - e^{-\sigma}) - [(e^{\sigma} + e^{-\sigma})(A_0 e^{\sigma} - D_0(1+i))]}{(e^{\sigma} - e^{-\sigma})^2} \right] \right] \Bigg] = 0
\end{aligned}$$

Un cop obtinguda la derivada parcial de la prima respecte la volatilitat de les accions d'un sector, es calcula la derivada parcial respecte l'endeutament en el moment inicial.

Amb aquest segon càlcul es comprova que la sensibilitat de la prima que rep l'inversor en funció del percentatge d'endeutament de l'empresa és del 100 %, és a dir, l'endeutament impacta directament en la prima. Com més elevat sigui l'endeutament, més alta serà la prima que hagi de rebre el Business Angel, ja que és aquest qui assumeix tot el risc. Així doncs:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial D_0} = & \frac{-(1+i)}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} + \frac{e^{\sigma}(1+i)}{(1+i)(e^{\sigma} - e^{-\sigma})} + \frac{(1+i)}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} - \frac{e^{-\sigma}(1+i)}{(1+i)(e^{\sigma} - e^{-\sigma})} \\
= & \frac{e^{\sigma}}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} - \frac{e^{-\sigma}}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} = \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{e^{\sigma} - e^{-\sigma}} = 1
\end{aligned}$$

5. SIMULACIÓ

A continuació es presenta una simulació per a calcular la prima que hauria de rebre el Business Angel en el moment de produir-se la inversió, segons el model elaborat. Per a dur-la a terme, es donarà valors als elements d'aquest model i es realitzaran els càlculs esmentats a l'apartat anterior. Així doncs, se suposa que els elements prenen els següents valors:

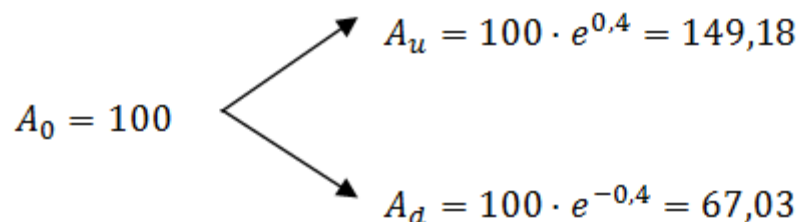
$$\begin{cases} A_0 = 100 \\ D_0 = 130 \% \\ \sigma = 40 \% \\ i = 4,05 \end{cases}$$

On el tipus d'interès que s'utilitza correspon al tipus d'interès lliure de risc dels Bons de l'Estat a 3 anys. A més, cal remarcar que el deute és superior a la valoració que fa el mercat de l'empresa, per tant, el mercat no voldrà finançar el projecte i l'emprenedor buscarà altres vies de finançament. En aquests casos, l'empresari no pot cobrir el seu deute amb l'actiu del qual disposa.

Seguint la teoria de les opcions s'han de crear els arbres que mostren l'evolució del subjacent, de l'opció de compra i de l'opció de responsabilitat limitada. Això serà útil per a trobar el valor de les opcions al moment inicial. En aquest cas són els següents:

a. Subjacent

Partint d'un valor de mercat de l'actiu al moment inicial de 100 unitats monetàries, s'obté el següent:


$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & A_u = 100 \cdot e^{0,4} = 149,18 \\ A_0 = 100 & & \\ & \searrow & A_d = 100 \cdot e^{-0,4} = 67,03 \end{array}$$

b. Opció de compra al moment inicial

$$S_0 = ? \quad \begin{cases} S_u = \Delta \cdot A_u + B \cdot (1 + i) = \Delta \cdot 149,18 + B \cdot (1,0405) \\ S_d = \Delta \cdot A_d + B \cdot (1 + i) = \Delta \cdot 67,03 + B \cdot (1,0405) \end{cases}$$

On, per definició, se sap que $S_u = A_u - D_1$ i $S_d = 0$.

Així doncs:

$$\begin{cases} \Delta \cdot 149,18 + B(1,0405) = 149,18 - 130 \cdot (1,0405) \\ \Delta \cdot 67,03 + B(1,0405) = 0 \end{cases}$$

Si es resol el sistema, s'arriba al següent resultat:

$$\Delta = \frac{149,18 - 135,27}{149,18 - 67,03} = 0,17$$
$$B = \left[\frac{-67,03 \left(\frac{149,18 - 135,27}{149,18 - 67,03} \right)}{1,0405} \right] = -10,90$$

Ara només cal substituir els valors obtinguts a l'expressió que es mostra a continuació per a trobar el valor de l'opció de compra al moment 0.

$$S_0 = \Delta \cdot A_0 + B = 0,17 \cdot 100 - 10,90 = 6,10$$

c. Opció de responsabilitat limitada al moment inicial

$$ORL_0 = ? \quad \begin{cases} ORL_u = \Delta \cdot A_u + B \cdot (1 + i) = \Delta \cdot 149,18 + B \cdot (1,0405) \\ ORL_d = \Delta \cdot A_d + B \cdot (1 + i) = \Delta \cdot 67,03 + B \cdot (1,0405) \end{cases}$$

On, per definició, se sap que $ORL_u = 0$ i $ORL_d = D_1 - A_d$. Així doncs:

$$\begin{cases} \Delta \cdot 149,18 + B(1,0405) = 0 \\ \Delta \cdot 67,03 + B(1,0405) = 130 \cdot (1,0405) - 67,03 \end{cases}$$

Si es resol el sistema, s'arriba al següent resultat:

$$\Delta = \frac{67,03 - 135,27}{149,18 - 67,03} = -0,83$$

$$B = \left[\frac{-149,18 \left(\frac{67,03 - 135,27}{149,18 - 67,03} \right)}{1,0405} \right] = 119,10$$

Ara només cal substituir els valors obtinguts a l'expressió que es mostra a continuació per a trobar el valor de l'opció de responsabilitat al moment 0.

$$ORL_0 = \Delta \cdot A_0 + B = -0,83 \cdot 100 + 119,10 = 36,10$$

Un cop coneguts els valors de l'opció de compra i l'opció de responsabilitat limitada al moment inicial, ja es pot calcular la prima que haurà de rebre el Business Angel quan realitzi la inversió. Només s'han de substituir els valors obtinguts a l'equació a la qual es va arribar a l'apartat 4.1:

$$X = ORL_0 - S_0 = 36,10 - 6,10 = 30$$

Per tant, es conclou que la prima que rep el Business Angel al moment de realitzar la seva inversió és de 30 €. S'observa fàcilment que aquest resultat coincideix amb la diferència entre $D_0 - A_0$, és a dir, l'inversor es queda tot l'excés i només presta una quantitat equivalent al valor de mercat de l'actiu en el moment inicial.

6. CONCLUSIONS

Aquest projecte desenvolupa un model de valoració de la prima que ha de rebre un Business Angel al moment de realitzar la seva inversió. S'ha creat un model que ha estat pioner en el mercat *Over The Counter*, ja que actualment no hi ha cap model de referència en un mercat no organitzat. Per a calcular aquesta prima s'ha adaptat el model de Merton per a valorar la posició d'un Business Angel, considerant aquesta com una cartera de derivats reals, ja que l'inversor té comprada una opció de compra i venuda una opció de responsabilitat limitada.

El present treball genera una eina molt útil per als petits empresaris, ja que els permet calcular quina ha de ser la prima amb la qual han de retribuir als inversors pel fet d'estar assumint tot el risc del projecte que volen posar en marxa. Aquest fet implica que aquesta prima depèn al 100 % de l'endeutament inicial i equival a la diferència entre el deute i el valor de mercat de l'actiu al moment de realitzar la inversió, la qual cosa comporta que l'inversor només prestarà una quantitat equivalent a la valoració que fa el mercat de l'actiu en el moment inicial. D'altra banda, s'ha demostrat que, degut a la posició que assumeixen els Business Angels, la volatilitat de les accions d'una empresa no afecta a la prima que han de rebre, ja que l'efecte queda compensat pel fet de ser alhora accionistes i creditors.

Aquest projecte té una especial rellevància per a les PIMES que configuren el teixit empresarial d'aquest país degut a l'actual etapa de recessió econòmica que s'està experimentant des de l'any 2007, fet que ha conduït a que es redueixin les possibilitats de finançament pels emprenedors, emfatitzant el valor de les empreses de capital risc i dels Business Angels.

7. BIBLIOGRAFIA

1. Brealey&Myers. “Principios de finanzas corporativas”, McGraw- Hill 7a edició.
2. Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A., 2011. “Investments”. McGraw-Hill 9th edition.
3. Chriss, N. A., 1997. “Black-Scholes and beyond. Option pricing models.” McGraw-Hill, New York.
4. John C. Hull, 2008. “Options, futures & other derivatives”. Prentice Hall, 7th edition.
5. Merton, Robert C., 1973. “The Theory of Rational Option Pricing”, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, spring, 141-183.

7.1. Webgrafia

1. Barcelona Business Angels, [en línia]. [Consulta: 13 de desembre de 2013]. Disponible a: <<http://www.bcnba.com/>>.
2. Estrella Perotti, *El modelo de Merton como medida alternativa de valoración del riesgo de default*. ESADE [en línia]. [Consulta: 16 de gener de 2014] Disponible a: <<http://www.bcr.com.ar/Publicaciones/investigaciones/The%20Merton%20Model.pdf>>.
3. Business Angel Magazine, *Growth Factor Biocapital* [en línia]. [Consulta: 9 de gener de 2014]. Disponible a: <<http://blog.m2mmarketplace.com/>>.
4. Bull Market Brokers, S.A. Sociedad de Bolsa: *Estrategias con opciones, el straddle comprado* [en línia]. [Consulta: 25 de febrer de 2014]. Disponible a: <<http://www.bullmarketbrokers.com/blog/elasesoronline/2011/07/15/estrategias-con-opciones-el-straddle-cono-comprado/>>.

5. Empresa Nacional de Innovación. *Capital riesgo*, [en línea].[Consulta: 29 de noviembre de 2013]. Disponible a: <<http://www.enisa.es>>.
6. Enciclopedia Financiera. Definición de las opciones de compra i venta, [en línea]. [Consulta: 3 de diciembre de 2013]. Disponible a: <<http://www.encyclopediainanciera.com/inversion/derivados/opcion-call.htm>> i <<http://www.encyclopediainanciera.com/inversion/derivados/opcion-put.htm>>.
7. Diccionario del dari *Expansión*. Definición de capital risc per Olaya Dávila, Alejandro, [en línea]. [Consulta:27 de noviembre de 2013]. Disponible a: <<http://www.expansion.com/diccionario-economico/capital-riesgo.html>>.
8. Diccionario del dari *Expansión*. Definición de la prima d'emissió per Martínez Laguna, Luís, [en línea]. [Consulta:27 de noviembre de 2013]. Disponible a: <<http://www.expansion.com/diccionario-economico/prima-de-emision.html>>.
9. GPS Económico. Revista *online* d'economia i negocis, publicació del 2 de juny de 2010, [en línea].[Consulta: 5 de diciembre de 2013]. Disponible a: <<http://gpseconomico.com/blog/opciones-de-compra-call-y-de-venta-put/>>.
10. Hernández Jiménez, Gregorio. *Opciones, qué son y cómo funcionan*. Invertir en bolsa, [en línea]. [Consulta: 17 de gener de 2014]. Disponible a: <http://www.invertiren bolsa.info/articulo_derivados_opciones_definicion_funcionamiento.htm>.
11. Investopedia. Financial theory: *Definition of The Merton Model*, [en línea]. [Consulta: 27 de gener de 2014]. Disponible a: <<http://www.investopedia.com/terms/m/mertonmodel.asp>>.
12. Emprendedores y PYME. *Financiación para emprendedores y PYME*, [en línea]. [Consulta: 21 de febrer de 2014]. Disponible a: <<http://www.ipyme.org>>.

13. Colomer Espinet, Albert. *Los Business Angels, innovando en la cultura de financiación de las empresas*. Marzo 2009, [en línea]. [Consulta: 21 de febrer de 2014]. Disponible a: <<http://www.ipyme.org>>.
14. Las bolsas de valores. *Conceptos y terminología de opciones*, [en línea]. [Consulta: 27 de gener de 2014]. Disponible a: <<http://www.lasbolsasdevalores.com/>>.
15. Tesoro público, consulta de l'última subhasta de bons de l'Estat a 3 anys, [en línea]. [Consulta: 19 d'abril de 2014]. Disponible a: <<http://www.tesoro.es/SP/index.asp>>.
16. Duana Ávila, Danae. *Modelo Black-Scholes-Merton para la toma de decisiones financieras*, [en línea]. [Consulta: 2 de gener de 2014]. Disponible a: <http://www.uaeh.edu.mx/investigacion/icea/LI_EcoReg/Danae_Duana/modelo.pdf>.
17. Universitat de València. *Matemáticas para los modelos dinámicos*, [en línea]. [Consulta: 16 de gener de 2014]. Disponible a: <<http://www.uv.es/olmos/black-scholes.pdf>>.
18. Web Capital Riesgo, [en línea]. [Consulta: 14 de desembre de 2013]. Disponible a: <www.webcapitalriesgo.com>.
19. Pablo Fernández. IESE, Universidad de Navarra. *Utilización de la fórmula de Black y Scholes para valorar opciones*, [en línea]. [Consulta: 27 de desembre de 2013]. Disponible a: <<http://web.iese.edu/pablofernandez/docs/FN-0425.pdf>>.
20. Mirás Calvo, Miguel Ángel. *Matemáticas en Wall Street: la fórmula de Black-Scholes*, [en línea]. [Consulta: 28 de desembre de 2013]. Disponible a: <<http://webs.uvigo.es/mmiras/Webpersonal/docusPDF/lugo.pdf>>.